ÉPREUVE DE PROBABILITÉS ET STATISTIQUES MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

(Option générale et option agronomie)

DURÉE : 4 heures

PREMIÈRE PARTIE

PROBABILITÉS ET STATISTIQUES MATHÉMATIQUES

DURÉE : 1 h 30

N.B. — *Les candidats sont priés :*

1° *D'écrire très lisiblement, de soigner la rédaction et la présentation matérielle. Il convient de numéroter les diverses questions en les séparant très nettement,* de respecter les notations de l'énoncé.

2° *De donner les explications nécessaires et suffisantes en faisant figurer sur la copie tous les calculs intermédiaires.*

3° *De donner les résultats encadrés.*

EXERCICE I

La population animale d'un pays africain est composée de la manière suivante (répartition mesurée grâce à de très nombreuses études menées par les techniciens locaux) :

Mammifères	Oiseaux	Reptiles	Amphibiens
%	%	%	%
44,7	43,9	7,8	3,6

Ce pays africain, grand ami de la France, effectue, à l'occasion du Centenaire de la signature du Traité d'amitié, l'envoi dans notre pays d'un grand nombre de ses animaux qui deviendront les pensionnaires d'un grand zoo parisien. Ces animaux sont répartis de la manière suivante :

Mammifères	Oiseaux	Reptiles	Amphibiens
290	250	33	29

En utilisant un test du χ^2, indiquer si cette répartition est similaire, au seuil d'erreur $\alpha = 5\ \%$, à celle de la population animale du pays. Même question pour le seuil $\alpha = 1\ \%$.

On indiquera les calculs dans un tableau.

.../...

ECOLES NATIONALES VETERINAIRES

1984

P 222

EXERCICE II

1° Calculer l'intégrale $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos 2x \, dx$.

2° Déduire de la question précédente le calcul de l'intégrale :

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos^2 x \, dx.$$

EXERCICE III

On dispose de 2 urnes U_1 et U_2, de 6 boules numérotées de 1 à 6 et d'un dé dont les faces portent respectivement les numéros 1, 2, 3, 4, 5, 6, ce dé étant parfaitement équilibré, c'est-à-dire que chacune de ses faces a la même probabilité d'apparition.

Au début de l'expérience, l'urne U_1 contient 2 boules et l'urne U_2 contient les 4 autres boules.

Une épreuve consiste à lancer le dé, à observer le numéro obtenu sur la face supérieure, puis à changer d'urne la boule portant ce numéro. X_n est la variable aléatoire égale au nombre de boules dans l'urne U_1 après n épreuves.

1° Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X_1 et donner la distribution de probabilité de X_1.

2° *a.* Exprimer $P(X_{n+1} = 0)$ en fonction de $P(X_n = 1)$.

b. Pour $l \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, exprimer $P(X_{n+1} = l)$ en fonction de $P(X_n = l-1)$ et $P(X_n = l+1)$.

c. Exprimer $P(X_{n+1} = 6)$ en fonction de $P(X_n = 5)$.

On indiquera avec précision le ou les théorèmes utilisés.

3° Montrer que : $E(X_{n+1}) = \frac{2}{3} E(X_n) + 1$.

TABLE

Valeur de P, probabilité de dépasser une valeur donnée de χ^2,
m, nombre des degrés de liberté

m \ P	0,95	0,90	0,50	0,20	0,05	0,01
1	0,004	0,016	0,455	1,642	3,84	6,64
2	0,103	0,211	1,39	3,22	5,99	9,21
3	0,35	0,584	2,37	4,64	7,82	11,34
4	0,71	1,06	3,36	5,99	9,49	13,28
5	1,14	1,61	4,35	7,29	11,07	15,09
6	1,64	2,20	5,35	8,56	12,59	16,81
7	2,17	2,83	6,35	9,80	14,07	18,48
8	2,73	3,49	7,34	11,03	15,51	20,09
9	3,32	4,17	8,34	12,24	16,92	21,67
10	3,94	4,87	9,34	13,44	18,31	23,21
11	4,58	5,58	10,34	14,63	19,68	24,72
12	5,23	6,30	11,34	15,81	21,03	26,22
13	5,89	7,04	12,24	16,98	22,36	27,69
14	6,57	7,79	13,34	18,15	23,68	29,14
15	7,26	8,55	14,34	19,31	25,00	30,58
16	7,96	9,31	15,34	20,46	26,30	32,00
17	8,67	10,08	16,34	21,62	27,59	33,41
18	9,39	10,86	17,34	22,76	28,97	34,80
19	10,12	11,66	18,34	23,90	30,14	36,19
20	10,85	12,44	19,34	25,04	31,41	37,57
21	11,59	13,24	20,34	26,17	32,67	38,93
22	12,34	14,04	21,34	27,30	33,92	40,29
23	13,09	14,85	22,34	28,43	35,17	41,64
24	13,85	15,66	23,34	29,55	36,42	42,98
25	14,61	16,47	24,34	30,68	37,65	44,31
26	15,38	17,29	25,34	31,80	38,88	45,64
27	16,15	18,11	26,34	32,91	40,11	46,96
28	16,93	18,94	27,34	34,03	41,34	48,28
29	17,71	19,77	28,34	35,14	42,56	49,59
30	18,49	20,60	29,34	36,25	43,77	50,89